p formé à partir des p premières lignes et des p premières colonnes de A est appelé le *mineur diagonal principal* d'ordre p.

1.8.1 Propriétés des déterminants.

- Le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants de chacune d'elles [6] :

$$\det(\mathrm{ABC}\cdots\mathrm{G}) = \det\mathrm{A}\,\det\mathrm{B}\,\det\mathrm{C}\,\cdots\det\mathrm{G} \tag{1.44}$$

Dès lors, même si le produit matriciel n'est pas commutatif, les déterminants des différents produits matriciels obtenus en changeant l'ordre des différents facteurs du produit sont par contre tous égaux.

Exemple 1.24 Soient

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

On calcule aisément par application de (1.42)

$$\det\mathrm{A} = -2 \qquad \text{et} \qquad \det\mathrm{B} = 3$$

D'autre part,

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ 43 & 54 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 34 & 50 \end{pmatrix}$$

et on a bien les égalités

$$\det(\mathrm{AB}) = -6 = \det\mathrm{A}\,\det\mathrm{B} = \det(\mathrm{BA})$$

Mathematica :
```
A = {{1, 2}, {3, 4}}; B = {{5, 6}, {7, 9}};
{Det[A], Det[B], Det[A · B], Det[B · A]}
→   {-2, 3, -6, -6}
```

Python :
```
A = np.array([[1,2], [3,4]]); B = np.array([[5,6], [7,9]])
np.linalg.det(A), np.linalg.det(B)
→   (-2.0000, 3.0000)
np.linalg.det(A @ B), np.linalg.det(B @ A)
→   (-6.0000, -6.0000)
```

Matlab :
```
A = [1 2; 3 4]; B = [5 6; 7 9];
[det(A), det(B), det(A*B), det(B*A)]
→   -2.0000   3.0000   -6.0000   -6.0000
```

- Le déterminant de A^{T} est égal à celui de A :

$$\det\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \det\mathrm{A} \tag{1.45}$$

Le déterminant de la matrice conjuguée et de l'adjointe sont quant à eux donnés par

$$\det\overline{\mathrm{A}} = \det\mathrm{A}^* = \overline{\det\mathrm{A}} \tag{1.46}$$

---

6. C'est une conséquence du théorème de Binet-Cauchy dont on trouvera l'énoncé général et la démonstration, par exemple, dans [1].

puisque le complexe conjugué du produit de plusieurs nombres complexes est égal au produit des complexes conjugués des différents termes.

- Si tous les éléments d'une rangée sont nuls alors le déterminant de la matrice est nul. La propriété est évidente, il suffit de développer le déterminant selon cette rangée pour arriver au résultat.
- Si on multiplie tous les éléments d'une rangée de A par un même facteur λ alors le déterminant est aussi multiplié par λ. Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \star & \star & \star \\ \lambda\beta & \star & \star & \star \\ \lambda\gamma & \star & \star & \star \\ \lambda\delta & \star & \star & \star \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \star & \star & \star \\ \beta & \star & \star & \star \\ \gamma & \star & \star & \star \\ \delta & \star & \star & \star \end{vmatrix} \tag{1.47}$$

Il suffit de développer le déterminant selon cette rangée pour arriver au résultat puisque les éléments de cette rangée sont multipliés par λ alors que les cofacteurs correspondants sont identiques dans les deux matrices, *i.e.*

$$\lambda\alpha\Delta_{11} + \lambda\beta\Delta_{21} + \lambda\gamma\Delta_{31} + \lambda\delta\Delta_{41} = \lambda\left[\alpha\Delta_{11} + \beta\Delta_{21} + \gamma\Delta_{31} + \delta\Delta_{41}\right] \tag{1.48}$$

Si toutes les rangées d'une matrice A d'ordre n sont multipliées par une même constante λ, on peut faire apparaître n facteurs λ dans l'expression du déterminant de sorte que

$$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det \mathrm{A} \tag{1.49}$$

En particulier, on notera que

$$\det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det \mathrm{A} \tag{1.50}$$

- Si on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice, le déterminant change de signe.
La propriété est vraie pour une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

Elle est également aisément vérifiée dans le cas de l'échange de deux lignes ou deux colonnes adjacentes d'une matrice carrée A d'ordre quelconque. En effet, soit A$'$ la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes p et $p+1$. En développant $\det A$ selon la p-ème colonne et $\det A'$ selon sa $(p+1)$-ème colonne, on obtient des expressions qui ne diffèrent que par les signes de tous les cofacteurs. Dès lors, on a bien $\det \mathrm{A}' = -\det \mathrm{A}$.
Enfin, la propriété se généralise à l'échange de deux lignes ou de deux colonnes quelconques puisqu'un tel échange peut être réalisé au moyen d'un nombre impair d'échanges de lignes ou de colonnes adjacentes.
- Si deux rangées parallèles d'une matrice sont identiques, alors son déterminant est nul. En effet, supposons les colonnes c_p et c_q identiques. Il vient, par la règle précédente,

$$\det(\mathrm{c}_1 \;\; \mathrm{c}_2 \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_p \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_q \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_n) = -\det(\mathrm{c}_1 \;\; \mathrm{c}_2 \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_q \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_p \;\; \cdots \;\; \mathrm{c}_n)$$

Or, puisque les colonnes échangées sont identiques, les deux déterminants sont égaux et

$$\det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c_p \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_n\right) = 0$$

- Si une des rangées est une combinaison linéaire de plusieurs termes, le déterminant est la combinaison linéaire correspondante des déterminants relatifs à chacun des termes.

  En particulier, si on note $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n$ les matrices-colonnes qui composent la matrice A et si

$$c_k = \sum_{l=1}^{p} \lambda_l c'_l \tag{1.51}$$

  où les c'_l sont des matrices-colonnes de même dimension que c_k, alors

$$\det A = \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c_k \ \ \cdots \ \ c_n\right) = \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c'_l \ \ \cdots \ \ c_n\right) \tag{1.52}$$

  La propriété est évidente dès lors que l'on développe le déterminant selon la k-ème colonne. Pour s'en convaincre, on peut considérer par exemple

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\alpha_2 & \star & \star & \star \\ \beta_1+\lambda\beta_2 & \star & \star & \star \\ \gamma_1+\lambda\gamma_2 & \star & \star & \star \\ \delta_1+\lambda\delta_2 & \star & \star & \star \end{vmatrix} &= (\alpha_1+\lambda\alpha_2)\Delta_{11} + (\beta_1+\lambda\beta_2)\Delta_{21} + (\gamma_1+\lambda\gamma_2)\Delta_{31} + (\delta_1+\lambda\delta_2)\Delta_{41} \\
&= \left[\alpha_1\Delta_{11} + \beta_1\Delta_{21} + \gamma_1\Delta_{31} + \delta_1\Delta_{41}\right] \\
&\qquad + \lambda\left[\alpha_2\Delta_{11} + \beta_2\Delta_{21} + \gamma_2\Delta_{31} + \delta_2\Delta_{41}\right] \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \star & \star & \star \\ \beta_1 & \star & \star & \star \\ \gamma_1 & \star & \star & \star \\ \delta_1 & \star & \star & \star \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha_2 & \star & \star & \star \\ \beta_2 & \star & \star & \star \\ \gamma_2 & \star & \star & \star \\ \delta_2 & \star & \star & \star \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

  puisque les matrices considérées partagent les mêmes cofacteurs $\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}$ et Δ_{41}.
- Le déterminant d'une matrice est inchangé si on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des autres rangées.
  Soit A′ la matrice obtenue, par exemple, en remplaçant la colonne p de A par $c_p + \lambda c_q$, il vient

$$\begin{aligned}
\det A' &= \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ (c_p+\lambda c_q) \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_n\right) \\
&= \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c_p \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_n\right) \\
&\qquad + \lambda \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_n\right) \\
&= \det\left(c_1 \ \ c_2 \ \ \cdots \ \ c_p \ \ \cdots \ \ c_q \ \ \cdots \ \ c_n\right) \\
&= \det A
\end{aligned} \tag{1.54}$$

1.8.2 Calcul du déterminant et opérations élémentaires.

Étant donné le rapport établi par les énoncés précédents entre les opérations élémentaires présentées au paragraphe 1.6 et le calcul des déterminants d'une matrice carrée, on pourra